

# Control sub-óptimo con desempeño robusto para regulación global de robots manipuladores

Mario O. Ordaz-Oliver, Omar J. Santos-Sánchez  
y Omar A. Domínguez-Ramírez

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo,  
Grupo de Electrónica y Control, CITIS-ICBI, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México  
x2\_kyo@hotmail.com, omarj@uaeh.edu.mx, omar@uaeh.edu.mx

**Resumen** En este trabajo se experimenta con un controlador sub-óptimo no lineal basado en el enfoque de programación dinámica y la teoría de estabilidad de Lyapunov. La propuesta reportada en este documento conserva la sencillez del Regulador Cuadrático Lineal (LQR, de las siglas en inglés "Linear Quadratic Regulator"), pero considerando el caso no lineal. También se encuentran las condiciones suficientes que definen la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado y se penaliza el índice de desempeño del controlador para su implementación en tareas de regulación global. Se presenta el resultado experimental de la contribución en una tarea de regulación basada en seguimiento aplicada en la interfaz háptica PHANTOM 1.0

**Palabras clave:** sub-óptimo; no lineal; interfaz háptica; estabilidad asintótica; función de Bellman.

## 1. Introducción

Cuando se considera el problema del control óptimo para sistemas no lineales en el enfoque de programación dinámica, generalmente debe resolverse la ecuación de Hamilton Jacobi Bellman. Sin embargo, la obtención de la solución de la ecuación de Hamilton Jacobi Bellman no es una tarea fácil. Ahora, cuando la programación dinámica se aplica al control de robots, el problema se complica debido a las singularidades y no linealidades en los robots. Además, la dificultad aumenta cuando la función Bellman o una aproximación de esta tiene que ser propuesta con el fin de optimizar el desempeño dinámico del robot. En el área de control óptimo de robots, se han presentado principalmente dos tipos de resultados: planificación de trayectorias con la optimización de la ley de control y el problema de estabilización óptima. En [1] se desarrolla una ley de control óptima para el seguimiento de la trayectoria de robots móviles, empleando una linealización del modelo con el propósito de obtener un control óptimo mediante la resolución de una ecuación de Riccati, que considera un índice de desempeño cuadrático de horizonte infinito. Por otro lado, considerando que la dinámica

es desconocida, [6] emplea un regulador cuadrático lineal (LQR) para obtener un control robusto de un robot tipo SCARA de dos articulaciones. Utilizando la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, los autores obtienen el control óptimo para un sistema robótico mediante la solución de una ecuación algebraica de Riccati. La optimización cuadrática se combina con un modelo computacional cerebral aritmético y redes neuronales. [10] utiliza una transformación para solucionar el problema de seguimiento de trayectoria en tiempo óptimo como un problema de control óptimo convexo con una sola entrada, los resultados se validan únicamente por simulaciones sobre un robot manipulador industrial KUKA 361 de seis grados de libertad. [3] propone dos diferentes problemas de planificación de trayectorias para robots manipuladores. En el primer problema, el efector final del robot es obligado a moverse a través de una trayectoria prescrita en el espacio de trabajo. Para el segundo caso, la trayectoria del efector final se determina tomando en cuenta la presencia de obstáculos con restricciones holonómicas. Ambos problemas se resolvieron aplicando el enfoque de cálculo variacional y considerando un problema de control óptimo de horizonte finito en un robot manipulador SCARA. En [2] se resuelve el problema de redundancia óptima global para robots manipuladores con el principio del máximo de Pontryagin. En [4] se realiza un algoritmo para la solución numérica del problema de control óptimo, con una técnica de programación cuadrática recursiva. En general, en la literatura examinada, sólo se presentan resultados a nivel de simulación, sin abordar su validación experimental. Por lo tanto, la principal contribución de este trabajo es poner a prueba un controlador no lineal sub-óptimo en lazo cerrado basado en el enfoque de programación dinámica para estabilizar y regular un manipulador robótico, penalizando el índice de desempeño para obtener un comportamiento apropiado para robots manipuladores en regulación global. Esta ley de control fue probada previamente para controlar un vehículo autónomo no tripulado (UAV) [9], dando como resultado un buen rendimiento en tiempo real. Se debe considerar que este tipo de sistemas son subactuados, y en el presente trabajo, se ha probado la ley de control no lineal para un sistema robótico completamente actuado. Se presentan los resultados experimentales para validar la viabilidad de este controlador. Además, teniendo en cuenta algunas propiedades de los robots manipuladores y el análisis de estabilidad de Lyapunov, se verifica que el sistema robótico en lazo cerrado es asintóticamente estable. Con este enfoque, las penalizaciones del controlador no lineal probado no son muy difíciles de encontrar. Esto es una ventaja cuando la implementación de un controlador se realiza en línea. El esquema propuesto se valida con los resultados experimentales mediante el uso de un dispositivo háptico PHANTOM 1.0, en una tarea de regulación punto a punto. Además, utilizando una penalización adecuada del estado y de la ley de control en el índice de desempeño para la síntesis del controlador no lineal, los resultados experimentales obtenidos indican que el algoritmo de control sub-óptimo tiene un desempeño eficaz.

El documento está organizado de la siguiente manera: En la sección 2, se presentan algunos resultados preliminares: síntesis de la ley de control y prueba

de la estabilidad del sistema en lazo cerrado. En la sección 3 se describe la plataforma PHANTOM 1,0 y a partir de ello se definen las condiciones para la evaluación de la ley de control sub-óptimo. La Sección 4, se emplea para dar a conocer los resultados experimentales de la implementación. Finalmente, en la sección 5 se definen las conclusiones y observaciones finales.

## 2. Síntesis de la estrategia de control no lineal

En esta sección se sintetiza la estrategia de control que se aplicará para esta contribución. Se desarrolla una ley de control no lineal sub-óptima para un dispositivo háptico cuya dinámica resulta ser una sistema no lineal afín. Como es conocido en la literatura, un sistema no lineal libre de perturbaciones se representa como:

$$\dot{\bar{x}} = f_0(\bar{x}) + f_1(\bar{x})u, \quad (1)$$

en el cual  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el estado del sistema y  $u \in \mathbb{R}^{1 \times p}$  es la entrada de control, con funciones continuas  $f_0(\bar{x})$  y  $f_1(\bar{x})$  en espacios apropiados. Suponga que el sistema (1) tiene un punto de equilibrio en cero y que las funciones  $f_0(\bar{x})$ ,  $f_1(\bar{x})$  satisfacen las siguientes condiciones:

$$\|f_0(\bar{x})\| \leq \alpha_0 \|x\|, \alpha_1 \leq \|f_1(\bar{x})\|, \alpha_0, \alpha_1 > 0. \quad (2)$$

Ahora considere la interfaz háptica Phantom 1.0 en la forma estándar para un robot manipulador:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau. \quad (3)$$

con  $H(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  matriz de inercias,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $G(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  vector de fuerzas debidas a efectos gravitacionales,  $\tau \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  vector de pares inerciales,  $q$ ,  $\dot{q}$  y  $\ddot{q} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  vectores de posiciones, velocidades y aceleraciones generalizadas respectivamente, con la forma:

$$H(q) = \begin{bmatrix} h_{11}(q_2, q_3) & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & h_{23}(q_2, q_3) \\ 0 & h_{32}(q_2, q_3) & h_{33} \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11}(q_2, q_3, \dot{q}_2, \dot{q}_3) & c_{12}(q_2, q_3, \dot{q}_1) & c_{13}(q_2, q_3, \dot{q}_1) \\ c_{21}(q_2, q_3, \dot{q}_1) & 0 & c_{23}(q_2, q_3, \dot{q}_3) \\ c_{31}(q_2, q_3, \dot{q}_1) & c_{32}(q_2, q_3, \dot{q}_3) & 0 \end{bmatrix},$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(q_2) \\ g_3(q_3) \end{bmatrix}, \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

y todos sus parámetros conocidos [8].

Para obtener la forma estándar de un sistema no lineal de las ecuaciones dinámicas del robot, se tiene que:

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} -H^{-1}(q) \{C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ H^{-1}(q)\tau \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Observe que la matriz  $H(\cdot)$  siempre posee inversa debido a que el sistema es completamente actuado. Defina las siguientes variables de estado:  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = x_2$ ,  $q_3 = x_3$ ,  $\dot{q}_1 = x_4$ ,  $\dot{q}_2 = x_5$ ,  $\dot{q}_3 = x_6$ , y definiendo  $\bar{x}_1 = [x_1 \ x_2 \ x_3]^\top$ ,  $\bar{x}_2 = [x_4 \ x_5 \ x_6]^\top$ ,  $\tau = u$ , se reescribe (4) como

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ -H^{-1}(\bar{x}_1) \{C(\bar{x}) \bar{x}_2 + G(\bar{x}_1)\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ H^{-1}(\bar{x}_1) u \end{bmatrix}, \quad (5)$$

donde

$$H(\bar{x}_1) = \begin{bmatrix} h_{11}(x_2, x_3) & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & h_{23}(x_2, x_3) \\ 0 & h_{32}(x_2, x_3) & h_{33} \end{bmatrix},$$

$$C(\bar{x}) = \begin{bmatrix} c_{11}(x_2, x_3, x_5, x_6) & c_{12}(x_2, x_3, x_4) & c_{13}(x_2, x_3, x_4) \\ c_{21}(x_2, x_3, x_4) & 0 & c_{23}(x_2, x_3, x_6) \\ c_{31}(x_2, x_3, x_4) & c_{32}(x_2, x_3, x_6) & 0 \end{bmatrix},$$

$$G(\bar{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(x_2) \\ g_3(x_3) \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

teniendo por consiguiente que

$$f_0(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ -H^{-1}(\bar{x}_1) \{C(\bar{x}) \bar{x}_2 + G(\bar{x}_1)\} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$f_1(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ H^{-1}(\bar{x}_1) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Para garantizar  $\|f_0(\bar{x})\| \leq \alpha_0 \|\bar{x}\|$  reescribiendo el sistema (3) con la dinámica de la interfaz háptica en forma de (1), en donde  $f_0(\bar{x})$  se define como:

$$f_0(\bar{x}) = \bar{f}_0(\bar{x}) + \bar{g}_0(\bar{x}), \quad (8)$$

esta separación se hace dado que  $f_0$  no satisface la condición de Lipschitz por la acción de los efectos gravitatorios. Tomando esta separación, (1) se redefine como:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}_0(\bar{x}) + \bar{g}_0(\bar{x}) + f_1(\bar{x}) u, \quad (9)$$

en donde

$$\bar{f}_0(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ -H^{-1}(\bar{x}_1) C(\bar{x}) \bar{x}_2 \end{bmatrix}, \bar{g}_0(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ -H^{-1}(\bar{x}_1) G(\bar{x}_1) \end{bmatrix},$$

consecuentemente (1) se expresa como:

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ -H^{-1}(\bar{x}_1) C(\bar{x}) \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ -H^{-1}(\bar{x}_1) G(\bar{x}_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ H^{-1}(\bar{x}_1) \end{bmatrix} u. \quad (10)$$

Motivados por el hecho de que el sistema (10) puede ser linealizado alrededor de un punto de equilibrio  $x^+$ , su linealización se expresa como:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu, \quad (11)$$

en donde:

$$\left. \frac{\partial f_0(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \right|_{x=x^+, u=u^+} = A, \quad \left. \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial u} \right|_{x=x^+, u=u^+} = B. \quad (12)$$

Con el par  $(A, B)$  controlable y  $\bar{x} = x - x^+$ . Considerando ahora el índice de desempeño dado por

$$J_L = \int_0^\infty (\bar{x}^\top Q \bar{x} + u^\top R u) dt, \quad (13)$$

donde  $Q \geq 0$ ,  $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y  $R \geq 0$ ,  $R = R^\top \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

Es bien conocido que el sistema lineal (11) puede ser estabilizado de manera óptima resolviendo el problema LQR, esto es encontrando una función  $V_B(\bar{x})$  tal que satisfaga la siguiente ecuación:

$$\left. \frac{dV_B(\bar{x})}{dt} \right|_{(11, u=u^*)} + \bar{x}^\top Q \bar{x} + (u^*)^\top R u^* = 0 \quad (14)$$

con  $u^* = -R^{-1}B^\top P \bar{x}$ . Entonces la función de Bellman que satisface la ecuación (14) se define por la forma cuadrática  $V_B(\bar{x}) = \bar{x}^\top P \bar{x}$ , donde  $P$  es la solución a la ecuación algebraica de Riccati.

Si se considera la ecuación (14), notece que el sistema (1) es localmente estable en el sentido de Lyapunov, en lazo cerrado con  $u^*$ . Como (11) es una linealización de (1), este modelo y control lineal  $u^*$  solo es válido para una región  $\varepsilon$ , tal que  $\|\bar{x}\| < \varepsilon$  para algún  $\varepsilon > 0$ . Se desea una ley de control no lineal, tal que garantice la estabilidad en lazo cerrado del sistema no lineal (1). Entonces, para  $\|\bar{x}\| > \varepsilon$  proponiendo la función de Bellman  $V_B(\bar{x})$  como una aproximación de la ecuación de Bellman para el sistema (1) de la siguiente manera:

$$\left. \frac{dV_B(\bar{x})}{dt} \right|_{(1)} + \bar{x}^\top Q \bar{x} + u^\top R u$$

Derivando ahora la función de  $V_B(\bar{x})$  a lo largo de las trayectorias del sistema (1) se obtiene:

$$D(\bar{x}, u) = 2f_0(\bar{x})^\top P \bar{x} + 2\bar{x}^\top P f_1(\bar{x}) u + \bar{x}^\top Q \bar{x} + u^\top R u, \quad (15)$$

note que  $D(\bar{x}, u)$  es convexa respecto a  $u$ , debido a que  $R > 0$ . Consecuentemente, la ecuación (15) tiene un mínimo, que está dado por:

$$\frac{\partial D(\bar{x}, u)}{\partial u} = 2Ru + 2f_1(\bar{x})^\top P \bar{x} = 0,$$

entonces, se tiene que

$$\tilde{u} = -R^{-1}f_1^\top(\bar{x})P\bar{x}, \quad (16)$$

observe que si  $\bar{x} \rightarrow 0$ , entonces  $f_1^\top(\bar{x}) \rightarrow B^\top$  y  $\tilde{u} \rightarrow u^*$  en la región  $\|\bar{x}\| < \varepsilon$ .

Ahora, con el fin de obtener las condiciones suficientes para concluir que el sistema (1) es asintóticamente estable en lazo cerrado con el controlador (16), observe que

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(\bar{x})}{dt} \right|_{(1, u=\bar{u})} &= 2f_0(\bar{x})P\bar{x} + 2\bar{x}^\top P f_1(\bar{x})\tilde{u}, \\ &= 2f_0(\bar{x})P\bar{x} - 2\bar{x}^\top P f_1(\bar{x})R^{-1}f_1^\top(\bar{x})P\bar{x}, \end{aligned}$$

ya que  $f_0(\bar{x})$  tiene la propiedad de Lipschitz, implica que

$$\left. \frac{dV(\bar{x})}{dt} \right|_{(1, u=\bar{u})} \leq 2\alpha_0\bar{x}^\top P\bar{x} - 2\bar{x}^\top P f_1(\bar{x})R^{-1}f_1^\top(\bar{x})P\bar{x},$$

entonces el sistema (1) es asintóticamente estable en lazo cerrado con el control (16) sí

$$\alpha_0 P - \alpha_1 \lambda_{\min}(R^{-1})P^2 < 0 \quad (17)$$

Ahora se puede establecer el siguiente resultado.

*Proposición 1:* Considere el sistema (1) con las funciones  $f_0(\cdot)$  y  $f_1(\cdot)$  que satisfacen las propiedades dadas en (2). Suponga que el sistema (1) puede ser linealizado alrededor de cierto punto de equilibrio  $x^+$  y que el par  $(A, B)$  del sistema linealizado (11) es controlable. Entonces la ley de control sub-óptima  $u$  dada por la ecuación (16) estabiliza el sistema (1) sí la desigualdad (17) se cumple.

### 3. Control del dispositivo háptico PHANToM 1.0 y condiciones de evaluación

En esta sección se describe la arquitectura del hardware de la interfaz háptica PHANToM 1.0 y se obtienen las matrices de penalización  $Q$  y  $R$  del índice de desempeño dado por (13), las cuales son útiles para hallar la matriz  $P$  de ganancias del control no lineal (16). Nuestro objetivo es estabilizar el dispositivo bajo una acción de regulación, utilizando la ley de control no lineal propuesta anteriormente, por medio su interfaz de potencia y una computadora personal. La interfaz de potencia se compone por tres Procesadores Digitales de Señales (DSP, de sus siglas en inglés) con hardware en arquitectura cerrada, que se comunican con la computadora por medio del protocolo IEEE 1284EP en puerto paralelo. Los actuadores del dispositivo háptico cuentan con decodificadores ópticos HEDM-5500-B02 y tienen una resolución mayor a 1024 pulsos por revolución, con una resolución en posición nominal de 0.03 N/mm, una fricción de 0.004 N, fuerza máxima de 8.5 N, rigidez de 3.4 N/mm y una inercia (masa aparente en el efector final) de 75 gr. El ordenador cuenta con un procesador intel core 2Duo a 2.66 GHz que trabaja en ambiente PC. La programación tanto de la estrategia de control como la dinámica del sistema se hacen en lenguaje Visual C++ con el juego de herramientas H3D, para la visualización gráfica del desempeño se emplea una programación fuera de línea con MATLAB.

PHANToM 1.0 es un dispositivo háptico de tres grados de libertad, que cuenta con articulaciones de revolución y por tanto puede ser definido como un mecanismo de eslabones articulados, el cual tiene propósitos distintos a los de un robot manipulador, no obstante, la técnica de modelado matemático es la misma. Su modelo dinámico se emplea para el diseño de estrategias de control y esta constituido por las ecuaciones de movimiento que relacionan las fuerzas debidas a efectos inerciales, Coriolis, centrípetas, gravitatorias y de fricción, siendo esta última despreciable por la calidad en la transmisión de movimiento articular. El modelo dinámico reducido de este dispositivo es obtenido por medio de la formulación de Euler-Lagrange, al que es aplicado el cambio de variable  $\bar{x} = x - x^+$  definido en la sección anterior, donde  $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^\top$  corresponden a las entradas de control para cada uno de los actuadores del sistema. Los puntos de equilibrio se definen por  $x^+ = [0 \ 0 \ 0 \ k_1 \ k_2 \ k_3]^\top$  que indican una tarea de regulación punto a punto a la posición articular  $\theta_1 = k_1$ ,  $\theta_2 = k_2$  y  $\theta_3 = k_3$ , en radianes y una velocidad 0 rad/seg. Suponiendo que (8) se satisface,  $\bar{f}_0(\bar{x})$  cumple con la condición (2), puesto que los efectos debidos a la fuerza de gravedad sobre el dispositivo PHANToM 1.0 siempre se anulan en las componentes  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  al agregar su compensación. Bajo este supuesto,  $\bar{f}_0(\bar{x})$  satisface la condición (2) con  $\alpha_0 = 8.660254037844387 \times 10^2$  y  $f_1(\bar{x})$  también cumple la condición (2) con  $\alpha_1 = 1.037690003471722 \times 10^4$ . Inicialmente se utiliza la ley de control sub-óptima no lineal sintetizada en la sección 2, usando la notación estándar para el sistema no lineal dada en (1) y con el controlador óptimo de la ecuación (16), se estabilizará el sistema (1, 5). Proponiendo una linealización del sistema alrededor del punto de equilibrio  $x^+ = [0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]^\top$ , y con condiciones iniciales  $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top$ , se observa que el modelo linealizado del sistema (1) es controlable. En consecuencia, se calcula un controlador alrededor del punto de equilibrio  $x^+$ , empleando el enfoque óptimo del LQR, entonces la función de Bellman se define como

$$V(x) = x^\top P x, P = P^\top > 0, \quad (18)$$

y  $P$  satisface la ecuación algebraica de Riccati. Para el índice de desempeño (13), se eligen las siguientes matrices  $Q$  y  $R$ :

$$Q = \begin{cases} q_{1,1} = 254.1756563965411, \\ q_{2,2} = 254.1756563965167, \\ q_{3,3} = 264.4382885838342, \\ q_{4,4} = 254.9973344114833, \\ q_{5,5} = 254.9973344114585, \\ q_{6,6} = 256.0342099346721, \\ q_{ij} = 0, i \neq j, \end{cases} \quad R = \begin{cases} r_{ij} = 6.153846153846154 \ i = j, \\ r_{ij} = 0 \ i \neq j. \end{cases}$$

Por lo tanto, el sistema linealizado alrededor del punto de equilibrio  $x^+$  de la forma dada por (11) se define por las siguientes matrices

$$A = \begin{cases} a_{1,4} = 1, a_{2,5} = 1, a_{3,6} = 1 \\ a_{5,2} = 9.5839, a_{5,3} = -10.5219 \\ a_{6,2} = 37.8075, a_{6,3} = 386.5271 \\ 0 \text{ para los elementos restantes} \end{cases} \quad B = \begin{cases} b_{4,1} = 2535, b_{5,2} = 2549, b_{6,3} = 10377 \\ 0 \text{ para los elementos restantes} \end{cases}$$

La condición de estabilidad (2) se satisface porque  $\alpha_0 P - \alpha_1 \lambda_{\min}(R^{-1}) P^2$  es definido negativo.

*Observación 1:* Se introducen algunas tendencias conservativas para la selección del par  $(Q, R)$  (una selección particular de estas matrices da como resultado una matriz  $P$  específica) que satisface la condición (17). Esto es una consecuencia natural, puesto que solo se proponen condiciones suficientes, de acuerdo a esto, se penaliza la convergencia del estado mediante  $Q$  y la robustez del control mediante  $R$  en (13) para obtener un desempeño del sistema aceptable en tareas de regulación. Por lo que las matrices  $Q$  y  $R$  escritas arriba, son el resultado de penalizar el estado y el control, hasta obtener un comportamiento deseable.

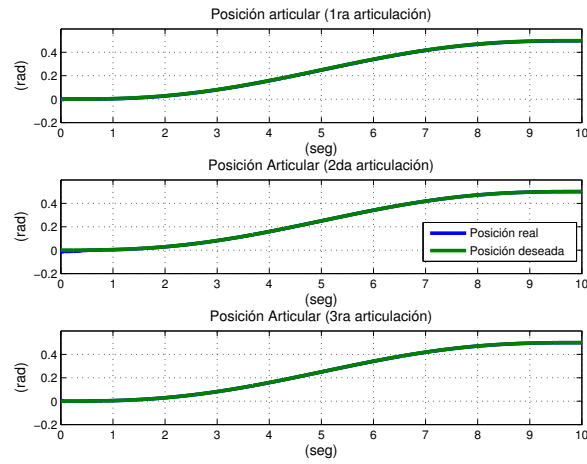
## 4. Resultados experimentales

En esta sección se presentan los resultados experimentales de la implementación de la ley de control no lineal sub-óptima, los cuales permiten validar el rendimiento y la estabilización del dispositivo háptico PHANTOM 1.0 en una tarea de regulación. En este experimento el dispositivo háptico se lleva a  $x_1 = 0.5$  rad  $x_2 = 0.5$  rad y  $x_3 = 0.5$  rad, que corresponden a  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  respectivamente, esto en un tiempo de 10 seg por medio de una regulación basada en seguimiento, que es obtenida a partir de un generador de tiempo base (TBG, de las siglas en inglés "Time Base Generator"), planteado para aplicaciones y esquemas de guiado háptico en [7]. Defina la función polinomial  $\xi(t)$  para la posición articular deseada como se muestra en (19) y calcule su derivada para velocidad articular deseada.

$$\xi(t) = a_3 \frac{(t - t_0)^3}{(t_b - t_0)^3} - a_4 \frac{(t - t_0)^4}{(t_b - t_0)^4} + a_5 \frac{(t - t_0)^5}{(t_b - t_0)^5}, \quad (19)$$

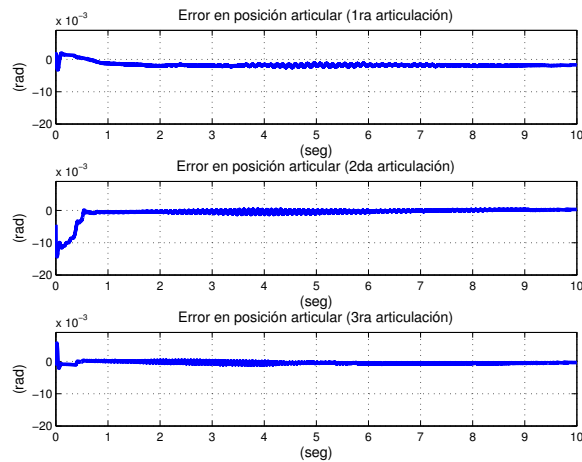
donde los coeficientes  $a_3 = 10$ ,  $a_4 = 15$  y  $a_5 = 6$ , y  $t_b = 10$  segundos, correspondiente a la duración del experimento. La Figura (1), ilustra el seguimiento articular, con alto desempeño evidente en la gráfica, para finalmente estabilizar al dispositivo en la consigna de movimiento propuesto, con error de baja magnitud al inicio del experimento.





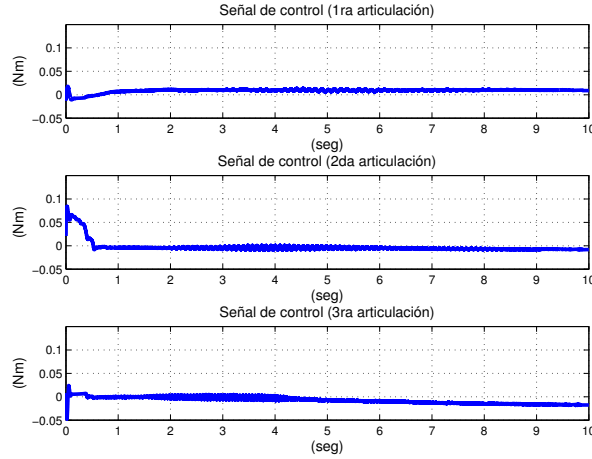
**Figura 1.** Posición articular y referencias deseadas del dispositivo háptico.

La Figura (2) representa la señal de error de posición articular, con errores máximos de centésimas de radián para la segunda articulación, dado el esfuerzo al que es sujeto el dispositivo al buscar la estabilización en la consigna articular. El error articular para la primera y tercera articulación, implica mayor desempeño, dado el menor esfuerzo en la ejecución de la tarea, adquiriendo magnitudes no mayores a 5 milésimas de radián.



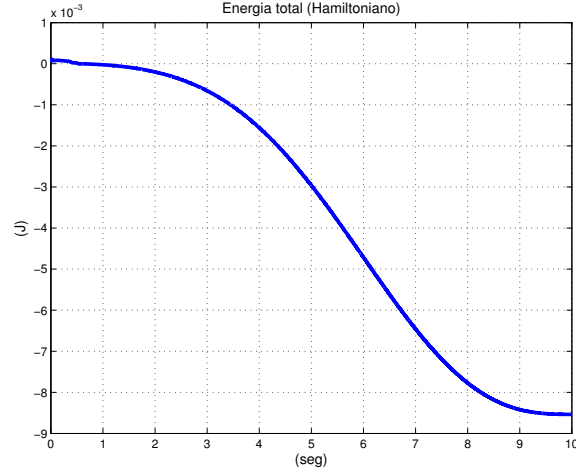
**Figura 2.** Señal de error en posiciones articulares del dispositivo háptico.

La contribución más relevante de la estrategia de control propuesta, se hace evidente en la Figura (3), ya que logra convergencia de posición articular con relativa baja energía. En el presente artículo no se dan a conocer estudios comparativos con otras técnicas de control, sin embargo es notable que la energía que emplea el dispositivo con otras estrategias de control robusto como en [5,7], es comparativamente mayor que nuestra propuesta.



**Figura 3.** Señal de control aplicada al dispositivo háptica.

En la Fig. (4) se muestra el comportamiento de la energía total empleada en la tarea de regulación bajo la acción del controlador no lineal sub-óptimo, en ella puede observarse como la cantidad de energía requerida para la regulación es relativamente pequeña, y en particular es denominada energía potencial. El signo negativo de la energía total empleada en la tarea de regulación se debe a las características en la construcción del dispositivo, es decir, las condiciones de reposo (sin acción de control) del dispositivo PHANTOM 1.0, se definen con el efector final en una posición vertical superior a su base y sin memoria mecánica en sus articulaciones, razón por la cual se incluye la compensación de la energía potencial del sistema en la ley de control.



**Figura 4.** Energía total empleada en la tarea de regulación.

## 5. Conclusiones

El controlador sub-óptimo que se ha presentado en este artículo, para la estabilización del dispositivo háptico en tareas de regulación, ha tenido resultados experimentales satisfactorios. La contribución de este resultado ilustra la viabilidad de métodos sub-óptimos para problemas de minimización en el consumo de energía en el control de robots manipuladores (minimiza el esfuerzo del mecanismo de eslabones articulados e interfaces electromecánicas de potencia), y la obtención de un comportamiento robusto mediante la penalización de la velocidad de convergencia y del control en el índice de desempeño. Se demuestra como una función cuadrática es útil en la obtención de controladores no lineales sub-óptimos. Igualmente, la función cuadrática podría ser empleada como una función candidata a Lyapunov para robots manipuladores para el análisis de estabilidad en lazo cerrado. Se aprovecharon las propiedades del modelo del dispositivo háptico para sintetizar la estrategia de control no lineal propuesta. El algoritmo de control no lineal sub-óptimo se considera factible para su implementación en aplicaciones de robots manipuladores. Los experimentos presentados demuestran un rendimiento aceptable del dispositivo bajo la ley de control penalizada robustamente propuesta.

**Agradecimientos.** El primer autor agradece a **CONACYT** por la beca de maestría otorgada durante el periodo Agosto 2011- Junio 2013, con número de registro **290649**, al **CITIS-UAEH** y a su laboratorio de robótica avanzada e interfaces hápticas por el apoyo para el desarrollo del presente trabajo.

## Referencias

1. Hemami, A. Mehrabi, M. G. and Cheng, R. M. H. Systhesis of an optimal control law for path tracking in mobile robots, *Automatica*, vol. 28(2), pp. 383-387, 1992.
2. Nakamura, Y., Optimal Redundancy Control of Robot Manipulators, *The International Journal of Robotics Research*, vol. 6(1), pp 32-42, 1987.
3. Gregoey, J., Olivares, A. and Stafetti, E. Energy-optimal trajectory planning for robot manipulators with holonomic constraints, *Systems & Control Letters*, vol. 61, pp. 279-291, 2012
4. Bock, HG., Plitt, KJ. A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems, *In proceedings of 9th IFAC World Congress*, Budapest, pp. 243-247, 1984.
5. Dominguez-Ramirez, O. A. & Parra-Vega, V. Active Haptic Interface with Purposes of Remote Training, *Proceedings of the 11th International Conference on Advanced Robotics*, ISBN 972-96889-9-0, vol. 3, pp. 1588-1593, University of Coimbra, Coimbra, Portugal, 2003.
6. Lin, F. and Brandt, R.D. An optimal control approach to robust control of robot manipulators, *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, vol. 14(1), pp 69-77, 1998.
7. Parra-Vega, V., S. Arimoto, Y. H. Liu, G. Hirzinger, and P. Akella, Dynamic Sliding PID Control for Tracking of Robot Manipulators: Theory and Experiments, *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, Vol. 19 (6), pp 967-976, December, 2003.
8. Domínguez-Ramírez, O. A. and Parra-Vega, V. Realistic Active Haptic Guided Exploration with Cartesian Control for Force-Position Tracking in Finite Time. *Journal of Applied Bionics and Biomechanics*, ISSN 1176-2322, ABBI, Vol 3 (4) pp 279-289, Cambridge, England, 2006.
9. Santos, Omar J., Romero, Hugo, Salazar, Sergio and Lozano, Rogelio. Real-Time Stabilization of a Quadrotor UAV by Nonlinear Suboptimal and Optimal Control Strategies, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, published on line in 2012, DOI 10.1007/s10846-012-9711-8, 2012.
10. Verscheure, D., Demeulenaere, B., Sweveres, J. De Schutter, J. and Diehl, M. Time optimal path tracking for robots: a convex optimization approach, *IEEE Trasaction on Automatic Control*, vol. 54(10), pp. 2318-2327, 2009.